INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ETUDES ECONOMIQUES

CONCOURS EXTERNE POUR LE RECRUTEMENT D'ELEVES ATTACHES

ET

CONCOURS D'ENTREE A L'ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE (Elèves Cadre de Gestion Statistique)

JUIN 1992

OPTION A (MATHEMATIQUES)
SECONDE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Durée : 4 heures)

ERRATA

PARTIE I

Question I.3, m 4), deuxième alinéa, première ligne :

au lieu de : "soit un réel $a < A(\varepsilon)$ ..."

lire : "soit un réel STRICTEMENT POSITIF $a < A(\varepsilon)$ ..."

PARTIE II

Question II.2., à la fin du dernier alinéa :

au lieu de : "...à l'aide de fonctions élémentaires."

lire : "...à l'aide de fonctions élémentaires développables en séries entières dont on précisera le rayon de convergence."

Question II.4., à la fin du dernier alinéa :

au lieu de : "...à l'aide de fonctions élémentaires."

lire : "...à l'aide de fonctions élémentaires développables en séries entières dont on précisera le rayon de convergence."

E.N.S.A.E M Math 2 1992

INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ETUDES ECONOMIQUES

CONCOURS EXTERNE POUR LE RECRUTEMENT D'ELEVES ATTACHES

et

CONCOURS D'ENTREE A L'ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE (Elèves Cadre de Gestion Statistique)

JUIN 1992

OPTION A (MATHEMATIQUES)

SECONDE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Durée : 4 heures)

TEXTE (5 pages)

Les parties I et II sont indépendantes.

Pour traiter une question, le candidat est autorisé à admettre des résultats qu'il n'aurait pas pu établir dans des questions précédentes ; dans ce cas il devra bien préciser les résultats auxquels il se réfère.

PROBLEME

x est une variable réelle ; Log x et ch x désignent respectivement le logarithme et le cosinus hyperbolique de x ; $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^*$ celui des entiers naturels strictement positifs.

E.N.S.A.E M Math 2 -1992-

PARTIE I

I.1 Soit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de terme général :

$$f_n : x \longrightarrow \frac{1}{ch^n x}.$$

Déterminer la limite de cette suite et préciser la nature de sa convergence.

I.2 A quelle condition l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{ch^n x}$ est-elle convergente ? Lorsque cette condition est satisfaite on désigne par I_n la valeur de cette intégrale impropre.

Calculer I_1, I_2 et I_3 puis exprimer I_n en fonction de n selon la parité de cet entier.

I.3 Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. Démontrer que zéro est la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par les quatre méthodes suivantes :

m1) : Considérer la limite de $\frac{I_{n+1}}{I_n}$ quand n tend vers $+\infty$, en déduire un équivalent de I_n et conclure.

m2) : Déterminer la limite d'une autre combinaison de I_n et I_{n+1} quand n tend vers $+\infty$, conclure et en déduire un équivalent de I_n.

m3) : Etudier la limite de $\text{Log } I_n$ lorsque n tend vers $+\infty$ et en déduire celle de I_n.

m4) : Soit un réel $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un réel $A(\varepsilon)$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on ait $\int_{A(\varepsilon)}^{+\infty} \frac{dx}{ch^n x} < \frac{\varepsilon}{3}$.

Soit un réel $a < A(\varepsilon)$, déterminer un entier $n_0(a,\varepsilon)$ tel que pour tout $n > n_0(a,\varepsilon)$ on ait $\int_a^{A(\varepsilon)} \frac{dx}{ch^n x} < \frac{\varepsilon}{3}$. Achever la démonstration.

Le résultat pouvait-il se déduire de la question I.1 ?

I.4 Etudier la convergence de la série entière dont le terme constant est nul et dont le terme général est $I_n x^n$ en précisant la situation aux bornes de son intervalle de convergence.

I.5 Montrer la convergence de l'intégrale impropre

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + \text{ch } x} .$$

Calculer la valeur de cette intégrale et en déduire celle de la somme de la série entière considérée au I.4 à la borne inférieure de son intervalle de convergence.

PARTIE II

Soit les équations différentielles :

$$(H) : (1-x^2)\ y'' - 3xy' = 0 ,$$
$$(E) : (1-x^2)\ y'' - 3xy' = 2 .$$

II.1 Déterminer les solutions réelles définies sur $]-1,+1[$ de (H) telles que, si a_0 et a_1 sont des réels donnés, on ait :

$$y(0) = a_0 \quad \text{et} \quad y'(0) = a_1 .$$

II.2 Déterminer les conditions H que doivent satisfaire les réels termes de la suite $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ pour que, s'il existe un intervalle ouvert non vide sur lequel la série entière de terme général $a_n x^n$ soit convergente, alors, sur cet intervalle, la fonction :

$$u : x \longrightarrow u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n ,$$

somme de la série entière, est solution de l'équation différentielle (H).

Déterminer toutes les suites dont les termes vérifient les conditions H et montrer qu'elles forment un espace vectoriel réel dont on donnera la dimension et une base.

Caractériser l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle (H) à l'aide de fonctions élémentaires.

II.3 Posant $y' = z$ où z est une fonction inconnue, déterminer la solution de l'équation (E) sur $]-1,+1[$ telle que, si b_0 et b_1 sont des réels donnés, on ait :

$$y(0) = b_0 \quad \text{et} \quad y'(0) = b_1 \ .$$

II.4 Déterminer les conditions E que doivent satisfaire les réels termes de la suite $(b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots)$ pour que, s'il existe un intervalle ouvert non vide sur lequel la série entière de terme général $b_n x^n$ soit convergente, alors, sur cet intervalle, la fonction :

$$v : x \longrightarrow v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \ ,$$

somme de la série entière, est solution de l'équation différentielle (E).

Déterminer toutes les suites dont les termes vérifient les conditions E et montrer qu'elles forment un espace affine réel dont on donnera un repère.

Caractériser l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle (E) à l'aide de fonctions élémentaires.

II.5 La solution générale sur $]-1,+1[$ de l'équation (H) peut s'écrire :

$$y : x \longrightarrow y(x) = c_1 t(x) + c_2 \ ,$$

où c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires et t une fonction réelle de x.

Déterminer deux fonctions réelles,

$$C_1 : x \longrightarrow C_1(x) \quad \text{et} \quad C_2 : x \longrightarrow C_2(x) \ ,$$

telles que la solution générale sur $]-1,+1[$ de l'équation (E) s'écrive :

$$y : x \longrightarrow C_1(x)\ t(x) + C_2(x) \ .$$

Retrouver ainsi le résultat obtenu à question II.3.